

Sèries de potències (aleatòries)

JOAQUIM ORTEGA-CERDÀ

Resum: La construcció de funcions aleatòries amb propietats interessants és un tema de llarga tradició en les matemàtiques. Darrerament, i resseguint l'estudi dels valors propis de matrius aleatòries, s'està duent a terme l'estudi dels zeros de polinomis i funcions aleatòries holomorfes.

Paraules clau: polinomis aleatoris, funcions analítiques gaussianes.

Classificació MSC2010: 30B20, 26C10, 30C15, 15B52.

1 Introducció

En l'*anàlisi* d'una funció, és freqüent descompondre-la en superposició de funcions simples i aquesta descomposició s'utilitza per arribar a esbrinar propietats de les funcions. Això és la base de l'anàlisi de Fourier, de les sèries de potències, de les ondetes, de les sèries de Dirichlet, etc.

El procés invers, la *síntesi*, construeix funcions a partir de la superposició de funcions simples per tal d'obtenir funcions amb propietats desitjades.

Un exemple clàssic és la funció de Weierstrass:

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} a^n \cos(b^n x),$$

amb $a < 1$ i $ab \geq 1$. Aquesta és una funció contínua a \mathbb{R} no derivable en cap punt.

De vegades, no sabem com triar els coeficients per fer una combinació de funcions simples amb propietats desitjades i el que fem és triar a l'atzar! Aquest ha estat un mecanisme popular en la segona meitat del segle xx utilitzat per generar funcions amb propietats prefixades. Un exemple paradigmàtic es troba en el llibre de Kahane de sèries de funcions aleatòries; vegeu [8].

Estudiarem ara un problema aleatori diferent. Volem generar punts aleatoris amb unes certes propietats de densitat i separació prefixada. Una forma de generar-los que ha guanyat popularitat en la darrera dècada (vegeu [6, 13]), tot i que hi ha antecedents molt més antics com ara [7, 9], és la següent: es tracta de triar polinomis, o, més generalment, funcions analítiques, mitjançant una elecció aleatòria dels seus coeficients de forma independent i observar els zeros d'aquests polinomis. Els punts aleatoris generats d'aquesta manera tenen propietats estadístiques de repulsió local molt interessants que han fet que siguin estudiats com a possibles models físics de partícules amb repulsió (fermions); vegeu [1].

2 Els polinomis de Kac

Comencem amb un cas senzill. Considerem el polinomi aleatori:¹

$$p_n(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n,$$

on a_j , $j = 0, \dots, n$ són variables aleatòries independents idènticament distribuïdes, $a_j \simeq N_{\mathbb{C}}(0, 1)$. Calculem els zeros de p_n : z_1, \dots, z_n . Quina és la seva distribució? Podem observar-ne un exemple a la figura 1. En aquest cas sembla clar i es pot demostrar que els zeros d'aquests polinomis es concentren uniformement distribuïts entorn del cercle unitat de forma majoritària. Aquests són els anomenats *polinomis de Kac*.

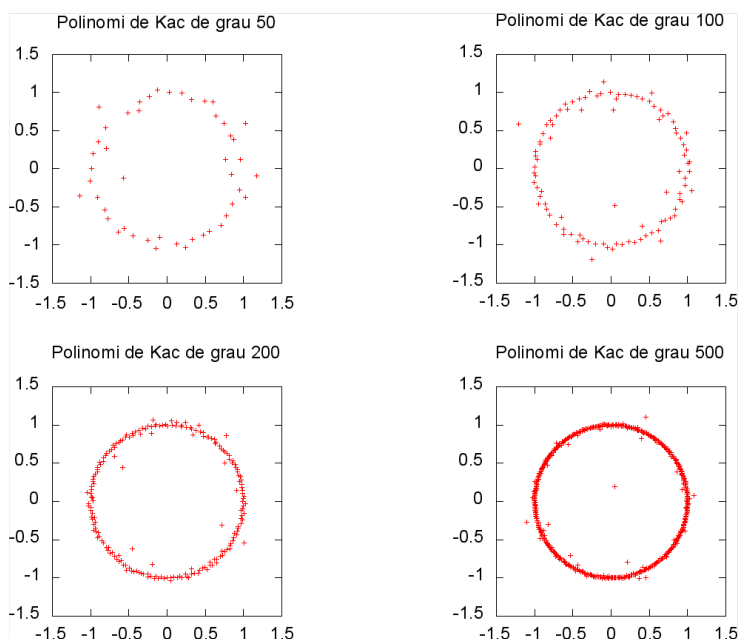


FIGURA 1: Els zeros dels polinomis de Kac.

¹ Marquem en vermell els elements aleatoris.

En aquest tipus de resultat, el fet que \mathbf{a}_i sigui una variable aleatòria normal és molt convenient des d'un punt de vista tècnic, però no és imprescindible. De fet, hi ha resultats anomenats *d'universalitat* que garanteixen que, independentment de la tria de variables aleatòries per als coeficients, sempre que siguin independents i idènticament distribuïdes, els resultats seran molt similars. Si aquestes fossin totes les possibilitats, l'interès acabaria aviat. El que és rellevant és la normalització que triem dels coeficients. Veurem que, aleshores, el resultat varia molt substancialment.

Considerem una variant dels polinomis de Kac. Triem els polinomis aleatoris (dits *de Weyl*) amb una normalització dels coeficients diferent:

$$\mathbf{p}_n(z) = \frac{\mathbf{a}_0}{\sqrt{0!}} + \frac{\mathbf{a}_1}{\sqrt{1!}}z + \dots + \frac{\mathbf{a}_n}{\sqrt{n!}}z^n,$$

on \mathbf{a}_j , $j = 0, \dots, n$ són variables aleatòries independents idènticament distribuïdes $\mathbf{a}_j \simeq N_{\mathbb{C}}(0, 1)$. Calculem els zeros de \mathbf{p}_n : $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$. La seva distribució, que observem en la figura 2, sembla ara repartir-se en un disc de radi \sqrt{n} , on n és el grau del polinomi.

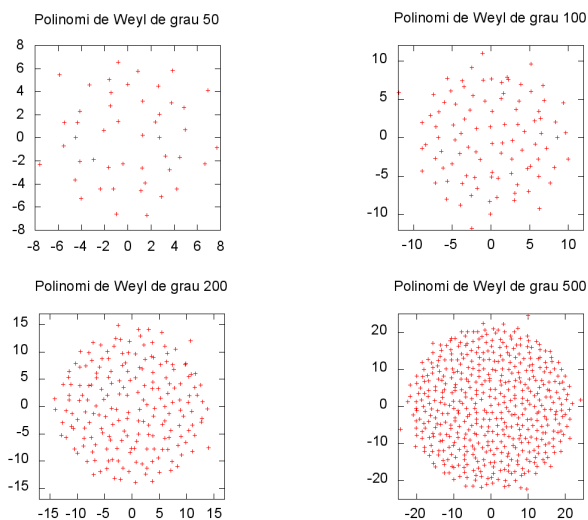


FIGURA 2: Els zeros dels polinomis de Weyl.

La diferència en la distribució dels zeros, entre els polinomis de Kac i els de Weyl, es pot explicar per la raó que les funcions $f_n(z) = z^n$ formen una base ortonormal de l'espai de Hardy de funcions holomorfes en el disc unitat amb norma $\|f\|^2 = \int_0^1 |f(e^{2\pi i\theta})|^2 d\theta$ i, en canvi, les funcions $g_n(z) = z^n / \sqrt{n!}$, utilitzades en la definició dels polinomis de Weyl, formen una base ortonormal de l'espai de Fock de funcions enteres g tals que $\|g\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |g(z)|^2 e^{-|z|^2} dm(z)$. Tant l'espai de Hardy com l'espai de Fock són espais de Hilbert de funcions amb nucli reproduïdor, i veurem que la distribució dels zeros de les funcions aleatòries així construïdes es pot calcular a partir del nucli reproduïdor.

Vèiem abans alguna característica en comú que tenen els zeros de les funcions analítiques aleatòries independentment de la normalització triada.

La distribució dels punts dins del disc (o a prop del cercle, en el cas dels polinomis de Kac) no és arbitrària. Fem un *zoom* dels zeros dels polinomis de Weyl i comparem-los amb el mateix nombre de punts, però distribuïts uniformement i independent en el quadrat $[-15, 15] \times [-15, 15]$, com hem fet en la figura 3.

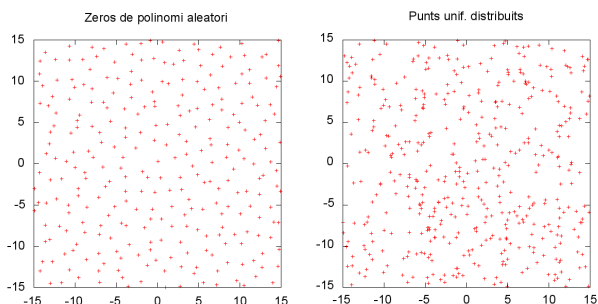


FIGURA 3

Observem que els zeros dels polinomis aleatoris semblen tenir més «estructura» i exhibeixen una repulsió local. També s'observa que no hi ha forats notables. Tot plegat sembla una disposició més uniforme.

Compararem aquest procés de punts aleatoris amb un altre de ben conegut, el procés de Ginibre. Consisteix a prendre una matriu de dimensió $n \times n$ amb tots els seus coeficients que siguin variables aleatòries idènticament distribuïdes i independents amb distribució gaussiana: $N_{\mathbb{C}}(0, 1)$ i a observar els valors propis d'aquesta matriu.

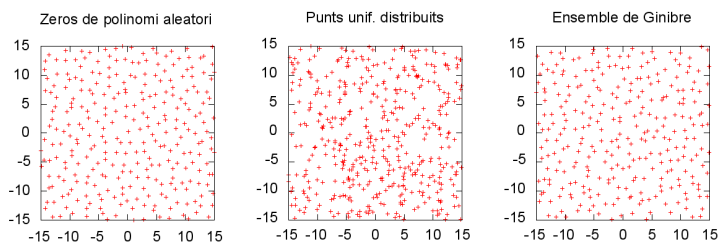


FIGURA 4

Ginibre a [2] va estudiar l'espectre d'aquesta matriu (que diagonalitza amb valors propis diferents fora d'un conjunt excepcional de matrius de probabilitat zero). Va observar que els valors propis són punts en el pla complex amb una distribució molt similar als zeros dels polinomis de Weyl. En la figura 4, veiem de prop la distribució dels zeros del polinomi aleatori i l'espectre de la matriu aleatòria.

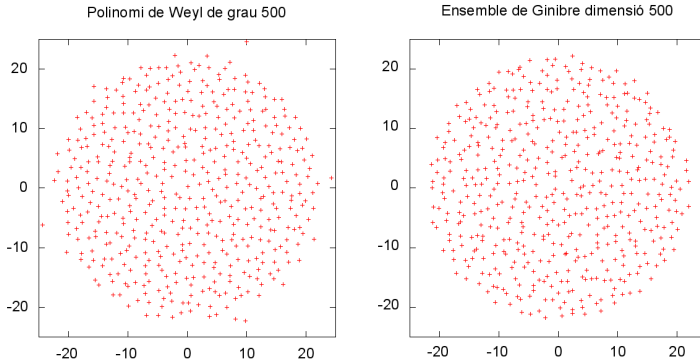


FIGURA 5

Si comparem els zeros i els valors propis globalment, com en la figura 5, observem una distribució molt similar, amb una diferència subtil. En el conjunt de Ginibre, la transició entre el disc ple de zeros i el seu complement sembla més nítida, més abrupta. En els zeros del polinomi de Weyl, sembla que hi ha una regió de transició on hi ha uns pocs zeros. Mirarem de justificar aquesta observació.

Els dos processos de punts aleatoris, el de Ginibre i el dels zeros del polinomi de Weyl, admeten una extensió a infinits punts. En el cas dels polinomis de Weyl, es tracta dels zeros d'una funció entera aleatòria:

$$f(z) = \sum_n \frac{a_n}{\sqrt{n!}} z^n.$$

El cas de valors propis de matrius de dimensions infinites és més delicat tècnicament. En qualsevol cas, una propietat en comú que tenen aquests processos d'infinits punts és que són invariants per translacions, és a dir, la probabilitat de trobar un nombre determinat de zeros en un conjunt A i en $A + z$ és la mateixa per a tot z . De fet, juntament amb el procés de Poisson clàssic, són els únics processos «naturals» que conec que tenen aquesta invariància per translacions. Això, naturalment, els fa molt atractius.

3 Un *detour* per les matrius aleatòries

La motivació per estudiar els valors propis de matrius aleatòries ve del problema de la difusió (*scattering*) nuclear. Wigner, en els anys cinquanta, va proposar l'estudi de valors propis aleatoris per modelar l'estat excitat d'alguns nuclis atòmics grans. Vegem alguns exemples trets del llibre clàssic de Mehta

(vegeu [10]) sobre matrius aleatòries, que segueix sent una bona referència. Es tracta de ressonàncies de difusió corresponents a nuclis de gadolini, tori i urani, representades en la figura 6 (treteta de [10]).

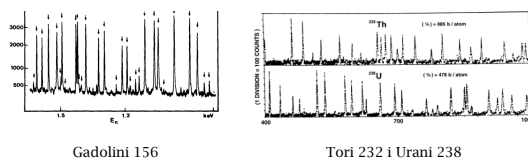


FIGURA 6

En la figura 7 (treteta de [10]), comparem la distància entre ressonàncies de difusió i l'espai entre vaps del GOE (*Gaussian Orthogonal Ensemble*), que són matrius simètriques reals tals que les seves entrades triangulars superiors són variables aleatòries independents gaussianes reals idènticament distribuïdes.

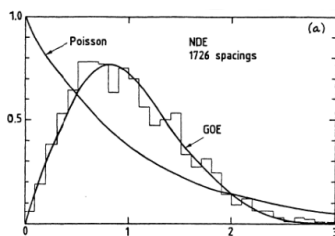


FIGURA 7

L'estudi dels valors propis de matrius aleatòries ha esdevingut un camp d'estudi immens (amb més de 2700 entrades al MathSciNet des de l'any 2000). Gran part de la seva popularitat és deguda a les relacions amb la física matemàtica, però també amb altres camps potser més sorprenents.

Estudiant la distribució dels zeros de la funció ζ de Riemann, Montgomery (vegeu [11]) conjecturà una certa repulsió local entre aquests zeros. És llegendària la trobada amb el famós físic nuclear Dyson, que li va fer notar la similitud d'aquesta qüestió amb la distribució dels espais entre els valors propis de matrius aleatòries del GUE (*Gaussian Unitary Ensemble*). Odlyzko a [12] experimenta numèricament aquesta conjectura calculant milions de zeros de la ζ de Riemann i ho compara amb la distribució dels valors propis del GUE, com en la figura 8 (treteta de [10]), i dóna suport al lligam conjecturat entre la correlació dels zeros de la funció ζ i la correlació entre els valors propis de matrius del GUE.

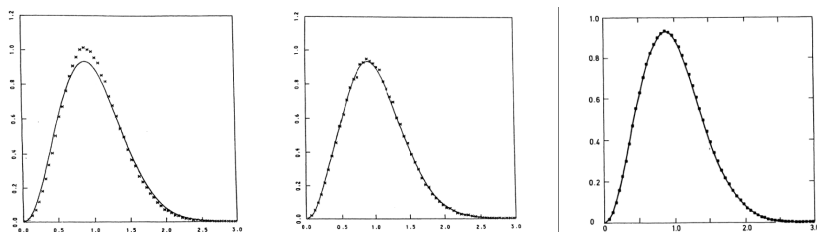


FIGURA 8

4 Interpretació dels resultats numèrics

4.1 La repulsió local

Intentem entendre alguns dels fenòmens observats en les figures anteriors. Una explicació heurística del perquè de la repulsió local és la següent:

PROPOSICIÓ 1. Si $p(z) = \prod_{i=1}^n (z - z_i)$ té coeficients a_k , i. e.:

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0,$$

aleshores l'aplicació $T(z_1, \dots, z_n) = (a_0, \dots, a_{n-1})$ té jacobià $\prod_{i < j} |z_i - z_j|^2$.

De manera que la mesura de Lebesgue «uniforme» sobre els coeficients es transporta per T a una mesura sobre els zeros amb funció de densitat 0, si dos zeros són iguals.

Això fa que la probabilitat de trobar zeros múltiples sigui zero i que la probabilitat de trobar zeros molt a prop l'un de l'altre sigui molt petita, ja que els coeficients dels polinomis són variables independents i localment la mesura de probabilitat és uniforme en els coeficients.

Intentem veure ara per què els zeros dels polinomis de Weyl es distribueixen de forma aparent en un disc. La manera més simple d'entendre això és estudiar la distribució en mitjana dels zeros. És el que es coneix com a *primera intensitat del procés de punts*.

4.2 La primera intensitat

Suposem que tenim una funció aleatòria de la forma

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k a_k z^k,$$

on m_k són coeficients (deterministes) prefixats i a_k variables aleatòries independents, $a_k \simeq N_{\mathbb{C}}(0, 1)$. La primera intensitat ρ és la mesura mitjana dels punts.

Més formalment, per a cada realització dels zeros z_1, z_2, \dots , anomenem μ a la mesura empírica dels zeros: $\mu = \sum_i \delta_{z_i}$, on δ_{z_i} és la delta de Dirac en el

punt z_i . Podem definir *la primera intensitat* ρ per dualitat com una mesura actuant sobre funcions contínues a suport compacte:

$$\int h d\rho := \mathbb{E} \int h d\boldsymbol{\mu}, \quad h \in C_c(\mathbb{C}),$$

on \mathbb{E} denota l'esperança. Per tant, podem interpretar que $\rho = \mathbb{E}(\boldsymbol{\mu})$. Volem calcular ρ , que ens donarà una primera aproximació en mitjana de la distribució dels zeros.

Vegeu ara una fórmula explícita per a ρ . Prenem $f_n(z) = m_n z^n$ i definim

$$K(z, w) = \sum_n f_n(z) \overline{f_n(w)}.$$

Observem que, si (f_n) és una base ortonormal de funcions d'un espai de Hilbert de funcions holomorfes amb nucli reproductor, aleshores K coincideix amb el seu nucli reproductor, *i. e.* $f(z) = \langle f(w), K(z, w) \rangle$. És oportú remarcar que no necessàriament (f_n) ha de ser la base ortonormal de cap espai de Hilbert, potser ni tan sols són independents. Però, en el cas de polinomis de Kac o en els de Weyl, sí que ho són, com ja hem indicat.

TEOREMA 2 (FÓRMULA D'EDELMAN-KOSTLAN). *Es compleix*

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \Delta \log K(z, z).$$

PROVA. Presentem una prova simplificada deguda a Sodin; vegeu [13]. Sabem que, per a tota $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$,

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \log |f| = \sum_{z_i: f(z_i)=0} \delta_{z_i}.$$

Prenem ara \boldsymbol{f} aleatòria $\boldsymbol{f}(z) = \sum_n \boldsymbol{a}_n m_n z^n = \sum_n \boldsymbol{a}_n f_n(z)$.

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{\mu}) = \mathbb{E} \left(\sum \delta_{z_i} \right) = \frac{1}{4\pi} \mathbb{E} \left(\Delta \log |\boldsymbol{f}|^2 \right),$$

$$\mathbb{E} \left(\Delta \log |\boldsymbol{f}|^2 \right) = \Delta \mathbb{E} \log |\boldsymbol{f}|^2.$$

Utilitzant ara que $\boldsymbol{f}(z)$ és una variable gaussiana amb mitjana 0, es veu immediatament que la variància és $K(z, z)$.

$$\mathbb{E} |\boldsymbol{f}|^2 = \sum_n |f_n(z)|^2 = K(z, z).$$

Per tant, si \boldsymbol{a} és una variable aleatòria amb distribució $N_{\mathbb{C}}(0, 1)$, tenim

$$\Delta \mathbb{E} \log |\boldsymbol{f}|^2 = \Delta \mathbb{E} \log |\boldsymbol{a}|^2 + \Delta \mathbb{E} \log K(z, z) = \Delta \log K(z, z),$$

atès que \boldsymbol{a} és independent de z i $\mathbb{E} \log |\boldsymbol{a}|^2$ és constant i, per tant, harmònica. D'altra banda, $K(z, z)$ és determinista. \square

Recordem el cas particular dels polinomis de Weyl:

$$p_n(z) = \frac{a_0}{\sqrt{0!}} + \frac{a_1}{\sqrt{1!}}z + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{n!}}z^n.$$

Ara,

$$K_n(z, z) = \sum_{k=0}^n \frac{|z|^{2k}}{k!} = \frac{\Gamma(n+1, |z|^2)}{\Gamma(n+1)} e^{|z|^2}.$$

Per la fórmula d'Edelman-Kostlan, la primera intensitat dels polinomis de Weyl és:

$$\rho_n(z) = \frac{1}{4\pi} \Delta(\log |\Gamma(n+1, |z|^2)|) + \frac{1}{\pi}.$$

Ginibre a [2] va calcular la primera intensitat del conjunt de Ginibre (matrius amb entrades gaussianes) i resulta:

$$\tilde{\rho}_n(z) = \Gamma(n, |z|^2) / (\pi \Gamma(n)).$$

Aquestes dues intensitats són funcions radials que tenen una transició molt ràpida d'1 a 0, com veiem en la figura 9. En particular, els zeros dels polinomis de Weyl tenen una transició lleugerament més lenta que els valors propis.

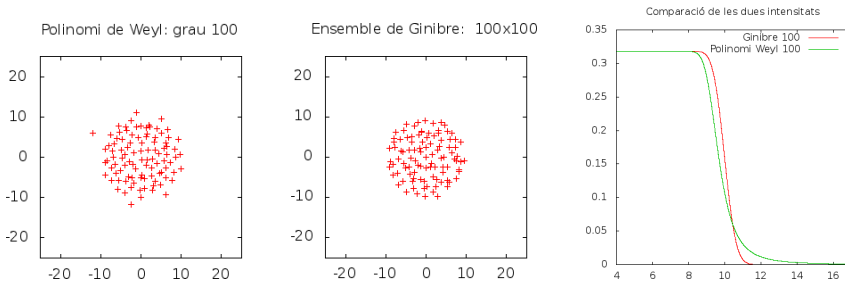


FIGURA 9

El tercer gràfic de la figura 9 explica, per tant, per què veiem algun zero més en els polinomis de Weyl que en el conjunt de Ginibre fora del disc on es concentren.

5 Punts crítics i zeros

En els polinomis aleatoris, no només s'estudia la distribució dels zeros, sinó que també s'han estudiat, per exemple, els punts crítics. Un exemple el trobem en l'estudi dels polinomis el·líptics fet per Hanin a [3].



FIGURA 10: Zeros i punts crítics de polinomis aleatoris, cortesia de Boris Hanin.

5.1 Els polinomis el·líptics

Considerem els polinomis p_n de la forma:

$$p_n(z) = a_0 \sqrt{\binom{n}{0}} + a_1 \sqrt{\binom{n}{1}} z + \cdots + a_n \sqrt{\binom{n}{n}} z^n.$$

Els zeros es distribueixen en \mathbb{C} de manera que, si fem la projecció estereogràfica, queden distribuïts uniformement en l'esfera unitat.

Comparats amb la distribució dels zeros dels polinomis de Weyl, que tendien cap a una distribució de punts invariant per translacions, la distribució dels zeros dels polinomis el·líptics és invariant per transformacions de Möbius. Per justificar aquest fet, podríem calcular la primera intensitat dels zeros dels polinomis el·líptics mitjançant la fórmula d'Edelman-Kostlan, i la intensitat resulta ser un múltiple de $(1 + |z|^2)^{-2}$. Aquesta mesura és la mesura de Lebesgue en l'esfera transportada al pla per la projecció estereogràfica i, per tant, és invariant per les transformacions de Möbius. Això no acaba de justificar del tot que els zeros siguin invariants, ja que només ho hem vist per a la primera intensitat (la mitjana dels zeros és invariant). Però hi ha un resultat sorprenent de rigidesa dels zeros de funcions analítiques gaussianes (vegeu [13, teorema 2]) que implica que totes les propietats estadístiques dels zeros queden determinades per la primera intensitat, en particular, la invariància.

Comparem els zeros dels polinomis i els punts crítics com es veu en la figura 10, on els punts crítics estan representats per un quadrat i els zeros,

per un punt. L'origen està representat per un estel. S'hi observa que, si ens allunyem de l'origen, els zeros i els punts crítics es troben aparellats i, de fet, si mesurem la distància entre ells, és aproximadament $1/n$, on n és el grau del polinomi. Intentem donar ara una explicació d'aquest fet. Per fer-ho, una idea potent és buscar un model físic del problema matemàtic; això permet guanyar intuïció i l'argument que donem es pot formalitzar fins a una prova rigorosa, que podeu trobar a [3], per exemple.

5.2 Heurística electrostàtica

Donem una justificació heurística de l'aparellament de zeros i punts crítics:

- Es pot veure que, amb probabilitat un, els zeros són separats, i un petit càlcul utilitzant la fórmula d'Edelman-Kostlan indica que es distribueixen uniformement en l'esfera de Riemann, un cop feta la projecció estereogràfica.
- Considerem el potencial electrostàtic aleatori $\mathbf{u} = \frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{p}_n|$. Es compleix $\Delta \mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \delta_{\mathbf{a}_j} - n\delta_{\infty}$. Això s'interpreta com un camp electrostàtic en l'esfera de Riemann generat per n càrregues positives situades en els zeros del polinomi aleatori i una càrrega negativa de pes n en el pol nord (que correspon al punt de l'infinit).
- Un punt crític del polinomi correspon a un punt on el gradient del potencial electrostàtic s'anulla, és a dir, a un punt d'equilibri del camp elèctric.

En un punt d'equilibri, hi actuen tres tipus de forces que s'han de compensar:

- La força de la càrrega negativa del punt de l'infinit. És proporcional a n .
- La força de la càrrega positiva de la partícula aleatòria més propera. És proporcional a $1/r$, on r és la distància a la partícula.
- La força de les altres càrregues. Aquestes estan distribuïdes «uniformement» al voltant del punt d'equilibri, i una variant del teorema central del límit permet veure que aquesta força és proporcional a \sqrt{n} , és a dir, negligible respecte a la força de la càrrega provinent del pol Nord.

Per tant, per compensar totes les càrregues, cal que la càrrega positiva més propera al punt crític estigui a una distància $1/n$ i, aproximadament, en el segment que uneix el punt crític i l'origen.

Aquest raonament heurístic es trenca a prop de l'origen (el pol Sud, en la representació estereogràfica), on la força exercida per la càrrega del pol Nord és zero. Efectivament, s'observa que l'aparellament de zeros i punts crítics es trenca a prop de l'origen.

Aquest punt resulta curiós, perquè, d'entrada, havíem comentat que els zeros eren invariants per transformacions de Möbius. L'explicació és que, en definir els punts crítics, estem privilegiant l'origen.

6 Sèries de Dirichlet aleatòries

Vegem, finalment, com l'estudi dels zeros de funcions aleatòries no es redueix a sèries de potències, sinó que també es pot estendre a sèries de Dirichlet aleatòries. La curiositat que fem notar a continuació és deguda a Helson (vegeu [5]) i està desenvolupada a [4]. Considerem la funció següent:

$$f(s) = \sum_{n \geq 1} \chi(n) n^{-s},$$

on $\chi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ és un caràcter aleatori. Un caràcter satisfà $\chi(n \cdot m) = \chi(n) \cdot \chi(m)$. Per tant, si prescrivim el valor de χ sobre els primers: $\chi(2), \chi(3), \chi(5), \dots$, determinem χ de forma única.

La probabilitat que introduïm en l'espai de caràcters és la següent: prenem $\chi(2)$ un punt de \mathbb{T} amb distribució uniforme. Independentment, $\chi(3)$ també amb distribució uniforme, i així amb tots els primers.

Identifiquem, doncs, els caràcters amb punts de \mathbb{T}^∞ i introduïm a \mathbb{T}^∞ la mesura de probabilitat producte. De la mateixa manera que havíem fet amb les sèries de potències aleatòries, podem considerar uns pesos a_n deterministes i la funció aleatòria

$$f(s) = \sum_{n \geq 1} a_n \chi(n) n^{-s}.$$

6.1 La hipòtesi de Riemann quasi segurament

Diem que (a_n) és totalment multiplicativa, si $a_1 = 1$ i $a_{nm} = a_n a_m$ per a tot n, m . Per a qualsevol $a > 0$, el semiplà $\Re(z) > a$ es denota per \mathbb{C}_a^+ . Helson va provar el teorema següent:

TEOREMA 3. *Si (a_n) és totalment multiplicativa i de ℓ_2 , aleshores la sèrie $f_\chi(s) = \sum_n a_n \chi(n) n^{-s}$ és convergent quasi segurament cap a una funció sense zeros a \mathbb{C}_0^+ .*

Una conseqüència gairebé immediata aplicant el teorema anterior a $a_n = n^{-1/2-\varepsilon}$ per a qualsevol $\varepsilon > 0$ és

COROLLARI 4 (HELSON). *Quasi segurament la funció de Riemann ζ_χ*

$$\zeta_\chi(s) = \sum_n \chi(n) n^{-s}$$

és convergent a $\mathbb{C}_{1/2}^+$ i no té zeros a $\mathbb{C}_{1/2}^+$.

Agraïments

L'autor agraeix el suport del projecte del Ministeri d'Economia i Competitivitat MTM2014-51834-P i del projecte 2014-SGR-289 de la Generalitat de Catalunya.

Referències

- [1] BERMAN, R. J. «Determinantal point processes and fermions on complex manifolds: large deviations and bosonization». *Comm. Math. Phys.*, 327 (1) (2014), 1–47.
- [2] GINIBRE, J. «Statistical ensembles of complex, quaternion, and real matrices». *J. Mathematical Phys.*, 6 (1965), 440–449.
- [3] HANIN, B. «Correlations and pairing between zeros and critical points of Gaussian random polynomials». *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2015 (2) (2015), 381–421.
- [4] HEDENMALM, H.; LINDQVIST, P.; SEIP, K. «A Hilbert space of Dirichlet series and systems of dilated functions in $L^2(0, 1)$ ». *Duke Math. J.*, 86 (1) (1997), 1–37.
- [5] HELSON, H. «Compact groups and Dirichlet series». *Ark. Mat.*, 8 (1969), 139–143.
- [6] HOUGH, J. B.; KRISHNAPUR, M.; PERES, Y.; VIRÁG, B. *Zeros of Gaussian analytic functions and determinantal point processes*. Providence: American Mathematical Society, 2009. (University Lecture Series; 51)
- [7] KAC, M. «On the average number of real roots of a random algebraic equation». *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49 (1943), 314–320.
- [8] KAHANE, J.-P. *Some random series of functions*. 2a ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics; 5)
- [9] LITTLEWOOD, J. E.; OFFORD, A. C. «On the distribution of zeros and a -values of a random integral function. II». *Ann. of Math. (2)*, 49 (1948), 885–952; errata 50 (1949), 990–991.
- [10] MEHTA, M. L. *Random matrices*. 3a ed. Amsterdam: Elsevier: Academic Press, 2004. (Pure and Applied Mathematics (Amsterdam); 142)
- [11] MONTGOMERY, H. L. «The pair correlation of zeros of the zeta function». A: *Analytic number theory* (Proc. Sympos. Pure Math., vol. XXIV, St. Louis Univ., St. Louis, Mo., 1972). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1973, 181–193.
- [12] ODLYZKO, A. M. «On the distribution of spacings between zeros of the zeta function». *Math. Comp.*, 48 (177) (1987), 273–308.
- [13] SODIN, M. «Zeros of Gaussian analytic functions». *Math. Res. Lett.*, 7 (4) (2000), 371–381.